Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Blatt 9
Abgabe: 21.01.2020, 14 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei T eine abzählbare vollständige Theorie mit einem abzählbaren saturierten Modell. Zeige, dass T ein Primmodell besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in einer Sprache $\mathcal{L}$. Eine $\mathcal{L}_M$-Formel $\varphi(x)$ mit Parametern aus M in einer freien Variable x ist *minimal* in $\mathcal{M}$, falls die Erfüllungsmenge $\varphi(M)$ unendlich ist, aber für jede $\mathcal{L}_M$-Formel $\psi(x)$ entweder $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ oder $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ nur endlich viele Realisierungen in $\mathcal{M}$ hat.
Zeige, dass jede minimale Formel $\varphi(x)$ in $\mathcal{M}$ einen eindeutigen nichtalgebraischen Typ in $S_1^{\mathcal{M}}(M)$ bestimmt:

$$p_\varphi = \{\psi(x)\, \mathcal{L}_M\text{-Formel} \,|\, (\varphi \wedge \psi)(M) \text{ ist unendlich}\},$$

wobei ein Typ algebraisch ist, wenn er die Bedingungen von Aufgabe 2 im Blatt 6 erfüllt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{0, S, <\}$ sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, S^{\mathcal{N}}(x) = x + 1, <)$.

1. Zeige, dass in jedem $\aleph_0$-saturierten Modell $\mathcal{M}$ von $T = Th(\mathcal{N})$ Nichtstandardelemente existieren, d. h. Elemente m aus M so, dass
$$m >^{\mathcal{M}} \underbrace{S^{\mathcal{M}} \circ \ldots \circ S^{\mathcal{M}}(0)}_{n} \text{ für jedes } n \text{ aus } \mathbb{N}.$$
2. Hat T Quantorenelimination?
3. Ist die Formel $\varphi[x] = (x \doteq x)$ minimal in $\mathcal{N}$?
4. Falls $\mathcal{M} \models T$ Nichtstandardelemente enthält, ist $\varphi[x]$ minimal in $\mathcal{M}$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ununterscheidbare Folge von Vektoren in einem $\aleph_0$-saturierten $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathcal{V}$ und w ein beliebiger Vektor aus V. Zeige, dass es eine natürliche Zahl N derart gibt, dass die Teilfolge $(v_n)_{n\geq N}$ ununterscheidbar über $\{w\}$ ist.

Hinweis: Ist die Formel $(x \doteq x)$ minimal in $\mathcal{V}$?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.